Leçon 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Développements :

Optimisation dans un Hilbert, Ellipsoïde de John-Loewner.

Bibliographie :

Tauvel, Nourdin, Bernis, Rombaldi algèbre, Rombaldi analyse réelle, Rouvière, Hirsch-Lacombe, OA, Briane-Pagès, Ouvrard.

Rapport du jury 2017 :

Il s'agit d'une leçon de synthèse, très riche, qui mérite une préparation soigneuse. Même si localement (notamment lors de la phase de présentation orale) des rappels sur la convexité peuvent être énoncés, ceci n'est pas attendu dans le plan. Il s'agit d'aborder différents champs des mathématiques où la convexité intervient. On pensera bien sûr, sans que ce soit exhaustif, aux problèmes d'optimisation, au théorème de projection sur un convexe fermé, au rôle joué par la convexité dans les espaces vectoriels normés (convexité de la norme, jauge d'un convexe,...). Les fonctions convexes élémentaires permettent aussi d'obtenir des inégalités célèbres. On retrouve aussi ce type d'argument pour justifier des inégalités de type Brunn-Minkowski ou Hadamard. Par ailleurs, l'inégalité de Jensen a aussi des applications en intégration et en probabilités. Pour aller plus loin, on peut mettre en évidence le rôle joué par la convexité dans le théorème de séparation de Hahn-Banach. On peut aussi parler des propriétés d'uniforme convexité dans certains espaces, les espaces L^p pour $p > 1$, par exemple, et de leurs conséquences.

Rapport du jury 2018 :

Il s'agit d'une leçon de synthèse, très riche, qui mérite une préparation soigneuse. Même si localement (notamment lors de la phase de présentation orale) des rappels sur la convexité peuvent être énoncés, ceci n'est pas nécessairement attendu dans le plan. Il s'agit d'aborder différents champs des mathématiques où la convexité intervient. On pensera bien sûr, sans que ce soit exhaustif, aux problèmes d'optimisation (par exemple de la fonctionelle quadratique), au théorème de projection sur un convexe fermé, au rôle joué par la convexité dans les espaces vectoriels normés (convexité de la norme, jauge d'un convexe,...). Les fonctions convexes élémentaires permettent aussi d'obtenir des inégalités célèbres. On retrouve aussi ce type d'argument pour justifier des inégalités de type Brunn-Minkowski ou Hadamard. Par ailleurs, l'inégalité de Jensen a aussi des applications en intégration et en probabilités. Pour aller plus loin, on peut mettre en évidence le rôle joué par la convexité dans le théorème de séparation de Hahn-Banach. On peut aussi parler des propriétés d'uniforme convexité dans certains espaces, les espaces L^p pour $p > 1$, par exemple, et de leurs conséquences.

1 Utilisation de la convexité d'ensembles

1.1 Ensembles convexes

Proposition 1 (Tauvel p70)**.** *Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Application 2. *Sur $\mathbb{R}$, les notions de connexité et de convexité coïncident.*

Définition 3 (Tauvel p71)**.** *Enveloppe convexe.*

Proposition 4 (Tauvel)**.** *$Conv(A)$ est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A.*

Proposition 5 (Nourdin)**.** *[Gourdon p66 algèbre] Théorème de Gauss Lucas.*

Application 6 (Gourdon p66)**.** *Localiser les racines de P'.*

Application 7. *Soit $P \in C[X]$ non constant, soit δ une droite de $\mathbb{C}$. On note H_1 et H_2 les demi-plans ouverts limités par δ. Si P' a une racine dans H_1 alors $P(h_1) = \mathbb{C}$. (?)*

Théorème 8 (Tauvel p71)**.** *[Gourdon p54] Théorème de Carathéodory.*

Application 9 (Tauvel p72)**.** *L'enveloppe convexe d'un compact est compacte.*

1.2 Point fixe sur les ensembles convexes

Proposition 10 (Romb p155)**.** *Si E est de dimension finie, $v \in L(E)$, K compact convexe de E stable par v, alors v a un point fixe dans K.*

Proposition 11 (Romb p155)**.** *Sous les mêmes hypothèses, si H sous-groupe compact de $GL(E)$ dont tous les éléments stabilisent K, alors tous les éléments de H ont un point fixe commun dans K.*

Application 12 (Romb alg p157)**.** *Si G sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, il existe $q \in Q^{++}(\mathbb{R})$, $G \subset O(q)$.*

Proposition 13 (Rouvière p171)**.** *Soit X une partie convexe et compacte non vide et $F : X \to X$. On suppose que pour tout $x, y \in X, ||F(x) - F(y)|| \leq ||x - y||$. Alors F admet un point fixe.*

Contre exemple 14. *Rotation.*

Proposition 15 (Berthelin)**.** *Théorème de Schauder.*

Application 16 (Berthelin)**.** *Théorème de Cauchy-Lipschitz-Peano.*

1.3 Projection sur les ensembles convexes

Théorème 17 (Hirsch p91)**.** *Théorème de projection sur un convexe fermé non vide. (4 résultats).*

Exemple 18 (Hirsch p94)**.** $d(x, \{a\}^\perp) = \frac{|<x,a>|}{||a||}$.

Exemple 19 (Hirsch p94)**.** *Dans* $L^2[0,1]$, $F = \{f \in E, \int_0^1 f(x)dx = 0\}$. *Si* $f = \exp$ *alors* $d(f, H) = e - 1$.

Contre exemple 20. $H = \mathbb{R}$, $C = \{0, 1\}$ *et* $x = 1/2$ *;* $H = \mathbb{R}$, $C =]0, 1[$, *et* $x = 2$ *;* $H = C([0, 1])$ *muni de la norme 2,* $C = \{f \in H, f = 0 sur [0, 1/2]\}$.

Contre exemple 21 (OA p98)**.** *Absence de complétude.*

Application 22 (Rouvière p384)**.** *Moindres carrés (régression linéaire).*

Application 23 (OA)**.** *Polynômes de meilleure approximation.*
Projection sur $\mathbb{R}_n[X]$ *dans le préhilbertien* $(C([0, 1]), ||\Delta||_2)$.

Remarque 24. *Regarder OA p98.*

Exemple 25 (FGN An 3)**.** *[Nourdin p51] Calcul du minimum d'une intégrale.*

Corollaire 26 (Hirsch p93)**.** *Théorème du supplémentaire orthogonal.*

Corollaire 27 (Hirsch p93)**.** *Critère de densité.*

Corollaire 28 (Hirsch p94)**.** $\overline{F} = F^{\perp\perp}$.

Application 29. *Montrer qu'une famille orthonormée est une base hilbertienne.*

Théorème 30 (Hirsch p96)**.** *Théorème de représentation de Riesz.*

Application 31. *Définition du gradient, du produit vectoriel, de l'adjoint.*

2 Utilisation de la convexité de fonctions

2.1 Régularité des fonctions convexes

Proposition 32 (OA p27)**.** *[Romb p233] Une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de* $E \times \mathbb{R}$.

Proposition 33 (Romb p234)**.** *Une fonction est convexe si et seulement si sa courbe représentative est en dessous de ses cordes.*

Proposition 34 (Romb p238)**.** f *est convexe si et seulement si la pente est croissante si et seulement si l'inégalité des trois pentes.*

Application 35 (Romb p240)**.** *Une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est constante si et seulement si elle est convexe et majorée.*

Application 36 (Romb p240)**.** *[Nourdin] Si* q *est une fonction continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^+$ *non identiquement nulle alors l'unique solution à valeurs réelles bornée sur* $\mathbb{R}$ *de* $y" - qy = 0$ *est la fonction nulle.*

Application 37. *Une fonction convexe est localement lipschitzienne.*

Proposition 38 (Romb p245)**.** *Caractérisation de la convexité dans le cas dérivable.*

Application 39 (OA)**.** $x \mapsto < Ax, x >$ *est strictement convexe si et seulement si* $A \in S_n^{++}$.

Exemple 40 (Romb p245)**.** Γ *est convexe.*

Exemple 41 (Romb p247)**.** $\exp$ *est strictement convexe.*

Application 42 (Romb p247)**.** $e^x \geq x + 1$.

Application 43. *Pour tout* $x \in [0, 2\pi]$, $1 - 2/\pi x \leq \cos x \leq 1$. *Application au calcul de l'intégrale de Fresnel par l'analyse complexe.*

Application 44 (Romb p248)**.** *De même avec le sinus.*

Application 45. *Si* (z_n) *converge vers* z *alors* $(1 + z_n/n)^n \to e^z$.

Application 46. *Processus de Galton-Watson.*

Exemple 47 (Romb p247)**.** *ln est strictement concave.*

Application 48 (Romb p247)**.** $ln(x) \leq x - 1$.

Application 49 (Nourdin p80)**.** *Convergence de* $\int_0^n (1 - t/n)^n t^{x-1} dt$ *vers* $\Gamma(x)$ *pour* $x > 0$.

Application 50 (Romb p247)**.** *Inégalité de Young.*

Proposition 51 (OA p29)**.** *Caractérisation de la convexité en dimension supérieure.*

2.2 Inégalités de convexité et applications

Inégalité de Jensen

Proposition 52 (Romb p249)**.** *Inégalité de Jensen discrète.*

Application 53. *Inégalité arithmético-géométrique.*

Application 54. *Soient* $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, *soit* $\alpha \in [0, 1]$. *Alors* $det((1-\alpha)A + \alpha B) \geq det(A)^{1-\alpha} det(B)^\alpha$, *avec inégalité stricte si* $\alpha \in]0, 1[$ *et* $A \neq B$.

Proposition 55 (Romb p250)**.** *Inégalité de Jensen continue.*

Inégalités en théorie de l'intégration

Proposition 56 (Briane)**.** *Inégalité de Hölder.*

Application 57 (Briane)**.** *Inclusions des espaces L^p en mesure finie.*

Contre exemple 58. *Si pas de mesure finie.*

Proposition 59 (Briane)**.** *Inégalité de Minkowski.*

Application 60 (Briane)**.** *L^p est un evn.*

Inégalités en probabilité

Proposition 61 (Briane p130)**.** *Inégalité de Jensen.*

Application 62 (Briane)**.** $E[|X|] \geq |E[X]|$.
$E[X]^2 \geq E[X]^2$.

Lemme 63 (Ouvrard)**.** $\exp(tx) \leq (1-x)/2exp(-t) + (1+x)/2exp(t)$.

Proposition 64 (Ouvrard)**.** *Inégalité de Hoeffding.*

3 Optimisation

3.1 Minimisation sur un convexe

Proposition 65 (Rouvière p381)**.** *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$ et $df(a) = 0$ laors f admet un minimum global sur U.*

Proposition 66 (OA p30)**.** *Les minima locaux des fonctions convexes sur un ensemble convexe sont en fait globaux et ils forment un ensemble convexe. De plus, une fonctions strictement convexe admet au plus un minimum.*

Remarque 67. *Une fonction strictement convexe n'admet pas toujours de minimum comme le montre la fonction* exp *sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 68. *Les fonctions convexes continues coercives sont minorées et atteignent leur minimum.*

Proposition 69. *Optimisation dans un Hilbert : Soit H un espace de Hilbert séparable, C une partie de H, et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction continue, coercive, et convexe. Alors f admet un minimum sur C, et ce minimum est atteint sur une sous-partie connexe par arcs.*

Application 70. *Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, soit $b \in \mathbb{R}^n$. La fonction $f : x \mapsto < Ax, x > - < b, x >$ est strictement convexe. Elle possède un unique minimum x qui vérifie $Ax = b$.*

Application 71. *Ellipsoïde de John Loewner.*

3.2 Aspects numériques

Proposition 72 (Bernis)**.** *Inégalité de Kantorovitch.*

Proposition 73 (Bernis)**.** *Algorithme du gradient à pas optimal.*

Proposition 74. *Méthode de Newton.*